
Géométrie algébrique/*Algebraic geometry*

Fonctions constructibles et intégration motivique I

Raf Cluckers

Katholieke Universiteit Leuven, Department of Mathematics, Celestijnenlaan 200B, 3001 Leuven, Belgium

Courriel : raf.cluckers@wis.kuleuven.ac.be

François Loeser

École Normale Supérieure, Département de mathématiques et applications, 45 rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 05, France (UMR 8553 du CNRS)

Courriel : Francois.Loeser@ens.fr

Résumé. — On introduit un formalisme d'images directes pour les fonctions constructibles motiviques. On en tire une version très générale de l'intégration motivique pour laquelle un théorème de changement de variables est établi. Ces constructions admettent une généralisation au cadre relatif, ce qui permet également de développer une version relative de l'intégration motivique. Les détails des constructions et des preuves seront donnés dans [1].

Abstract (Constructible functions and motivic integration I). — We introduce a direct image formalism for constructible motivic functions. One deduces a very general version of motivic integration for which a change of variables theorem is proved. These constructions are generalized to the relative framework, in which we develop a relative version of motivic integration. Details of constructions and proofs will be given in [1].

1. Préliminaires

1.1. Langage de Denef-Pas. — Dans ce travail on fixe un corps k de caractéristique zéro et on considère des corps K contenant k ainsi que le corps des séries de Laurent $K((t))$ muni de la valuation naturelle $\text{ord} : K((t))^\times \rightarrow \mathbf{Z}$. Pour x dans $K((t))$ on pose $\overline{\text{ac}}(x) = xt^{-\text{ord}(x)} \bmod t$ si $x \neq 0$ et $\overline{\text{ac}}(0) = 0$. On utilise le langage de Denef-Pas \mathcal{L}_{DP} . Il s'agit d'un langage à trois sortes $(\mathbf{L}_{\text{Val}}, \mathbf{L}_{\text{Res}}, \mathbf{L}_{\text{Ord}}, \text{ord}, \overline{\text{ac}})$. Pour la sorte de type Val, on prendra comme langage \mathbf{L}_{Val} le langage des anneaux $\mathbf{L}_{\text{Rings}} = (+, -, \cdot, 0, 1)$, de même, on prendra le langage $\mathbf{L}_{\text{Res}} = \mathbf{L}_{\text{Rings}}$ pour la sorte de type Res, tandis que pour la sorte de type Ord on prendra le langage de Presburger

$$\mathbf{L}_{\text{PR}} = \{+, 0, 1, \leq\} \cup \{\equiv_n \mid n \in \mathbf{N}, n > 1\},$$

avec \equiv_n la relation d'équivalence modulo n . Les symboles ord et $\overline{\text{ac}}$ seront interprétés respectivement comme la valuation et la composante angulaire. Ainsi $(K((t)), K, \mathbf{Z})$ est une

structure pour \mathcal{L}_{DP} . Les formules du premier ordre dans le langage \mathcal{L}_{DP} sont construites à partir des symboles de \mathcal{L}_{DP} ainsi que de variables, des connecteurs logiques \wedge, \vee, \neg , des quanteurs \exists, \forall et du symbole de l'égalité $=$. En général on dispose également d'un symbole de constante dans la sorte de type Val, resp. Res, pour tout élément de $k((t))$ resp. k .

1.2. Sous-assignements. — Soit $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}$ un foncteur d'une catégorie \mathcal{C} à valeurs dans celle des ensembles. Rappelons qu'un sous-assignement h de F est la donnée, pour tout objet C de \mathcal{C} , d'un sous-ensemble $h(C)$ de $F(C)$, cf. [3]. Les opérations et notations usuelles de la théorie des ensembles s'étendent trivialement aux sous-assignements. Ainsi pour deux sous-assignements h et h' d'un même foncteur, on définit des sous-assignements $h \cup h'$, $h \cap h'$ et la relation $h \subset h'$, etc. Si $h \subset h'$ on dit que h est un sous-assignement de h' . Un morphisme $f : h \rightarrow h'$ entre sous-assignements de foncteurs F_1 et F_2 est la donnée pour tout C d'une application $f(C) : h(C) \rightarrow h'(C)$. On définit aisément le sous-assignement $f(h)$ de F_2 ainsi que le graphe de f , un sous-assignement de $F_1 \times F_2$, cf. [3].

1.3. Sous-assignements définissables. — Soit F_k la catégorie des corps contenant k . On note $h[m, n, r]$ le foncteur $F_k \rightarrow \text{Ens}$ donné par $h[m, n, r](K) = K((t))^m \times K^n \times \mathbf{Z}^r$. A toute formule φ dans \mathcal{L}_{DP} à coefficients dans $k((t))$, resp. k , dans la sorte valuée, resp. résiduelle, ayant respectivement m, n et r variables libres dans les différents types, on associe un sous-assignement h_φ de $h[m, n, r]$, en prenant pour $h_\varphi(K)$ le sous-ensemble de $h[m, n, r](K)$ formé des points satisfaisant φ . Un tel sous-assignement sera appelé définissable. On définit une catégorie Def_k en prenant comme objets les sous-assignements définissables d'un $h[m, n, r]$. Les morphismes dans Def_k sont les morphismes $f : h \rightarrow h'$ avec h et h' sous-assignements définissables de $h[m, n, r]$ et $h[m', n', r']$ respectivement dont le graphe est définissable. Si S est un objet de Def_k , on note Def_S la catégorie des morphismes $X \rightarrow S$ dans Def_k . On écrit $S[m, n, r]$ pour $S \times h[m, n, r]$. Un point x de S est un couple (x_0, K) avec K dans F_k et x_0 un point de $S(K)$. On note $|S|$ l'ensemble des points de S . On pose alors $k(x) = K$ et on dispose d'un foncteur "fibre en x " $i_x^* : \text{Def}_S \rightarrow \text{Def}_{k(x)}$.

1.4. Dimension. — A toute sous-variété algébrique Z de $\mathbf{A}_{k((t))}^m$ on associe le sous-assignement définissable h_Z de $h[m, 0, 0]$ donné par $h_Z(K) = Z(K((t)))$. L'adhérence de Zariski d'un sous-assignement S de $h[m, 0, 0]$ est l'intersection W des sous-variétés algébriques Z de $\mathbf{A}_{k((t))}^m$ telles que $S \subset h_Z$. On définit la dimension de S comme $\dim S := \dim W$. Plus généralement, si S est un sous-assignement de h_Z of $h[m, n, r]$, on définit $\dim S$ comme la dimension de l'image de S par la projection $h[m, n, r] \rightarrow h[m, 0, 0]$. La démonstration de l'énoncé suivant n'est pas triviale et repose sur des résultats de Denef et Pas [6] et van den Dries [4].

Proposition 1. — *Deux objets isomorphes de Def_k ont même dimension.*

2. Fonctions constructibles

2.1. — Fixons S dans Def_k . On considère la sous-catégorie RDef_S de Def_S formée des sous-assignements définissables Z de $S \times h[0, n, 0]$, pour n variable, le morphisme $Z \rightarrow S$ étant induit par la projection sur S . On note $SK_0(\text{RDef}_S)$ le quotient du semi-groupe libre sur les classes d'isomorphisme d'objets $[Z \rightarrow S]$ de RDef_S par les relations $[\emptyset \rightarrow S] = 0$ et $[(Y \cup Y') \rightarrow S] + [(Y \cap Y') \rightarrow S] = [Y \rightarrow S] + [Y' \rightarrow S]$ et $K_0(\text{RDef}_S)$ le groupe abélien associé. Noter que le morphisme $SK_0(\text{RDef}_S) \rightarrow K_0(\text{RDef}_S)$ n'est pas injectif. Le produit cartésien induit une unique structure de semi-anneau sur $SK_0(\text{RDef}_S)$ et d'anneau sur $K_0(\text{RDef}_S)$. Pour tout morphisme $f : S \rightarrow S'$ dans Def_k , on dispose d'un morphisme $f^* : SK_0(\text{RDef}_{S'}) \rightarrow SK_0(\text{RDef}_S)$ induit par produit fibré. Si $f : S \rightarrow S'$ est un objet dans $\text{RDef}_{S'}$, la composition avec f induit un morphisme $f_! : SK_0(\text{RDef}_S) \rightarrow SK_0(\text{RDef}_{S'})$. Ces constructions s'étendent à K_0 . On considère l'anneau $A = \mathbf{Z}[\mathbf{L}, \mathbf{L}^{-1}, \left(\frac{1}{1-\mathbf{L}^{-i}}\right)_{i>0}]$. Pour tout réel $q > 1$ on note $\vartheta_q : A \rightarrow \mathbf{R}$ le morphisme envoyant \mathbf{L} sur q . On note A_+ le sous-semi-groupe de A formé des a tels que $\vartheta_q(a) \geq 0$ pour tout $q > 1$. On note $\mathcal{P}(S)$ le sous-anneau de l'anneau des fonctions $|S| \rightarrow A$ engendré par les constantes, les fonctions définissables $S \rightarrow \mathbf{Z}$ et les fonctions de la forme \mathbf{L}^β avec β définissable $S \rightarrow \mathbf{Z}$. On note $\mathcal{P}_+(S)$ le semi-anneau formé des fonctions de $\mathcal{P}(S)$ à valeurs dans A_+ .

2.2. — Si Y est un sous-assignement définissable de S , on note $\mathbf{1}_Y$ la fonction de $\mathcal{P}(S)$ valant 1 sur Y et 0 ailleurs. On note $\mathcal{P}^0(S)$, resp. $\mathcal{P}_+^0(S)$, le sous-anneau de $\mathcal{P}(S)$, resp. le sous-semi-anneau de $\mathcal{P}_+(S)$, engendré par de telles fonctions et par la fonction constante $\mathbf{L} - 1$. On note \mathbf{L} et $\mathbf{L} - 1$ la classe de $S[0, 1, 0]$ et $S \times h_{\mathbf{A}_k^1 \setminus \{0\}}$ dans $SK_0(\text{RDef}_S)$ et dans $K_0(\text{RDef}_S)$. On a des morphismes naturels $\mathcal{P}^0(S) \rightarrow K_0(\text{RDef}_S)$ et $\mathcal{P}_+^0(S) \rightarrow SK_0(\text{RDef}_S)$ envoyant $\mathbf{1}_Y$ sur $[Y \rightarrow S]$ et $\mathbf{L} - 1$ sur $\mathbf{L} - 1$. Finalement on définit le semi-anneau des fonctions constructibles positives par $\mathcal{C}_+(S) = SK_0(\text{RDef}_S) \otimes_{\mathcal{P}_+^0(S)} \mathcal{P}_+(S)$ et l'anneau des fonctions constructibles par $\mathcal{C}(S) = K_0(\text{RDef}_S) \otimes_{\mathcal{P}^0(S)} \mathcal{P}(S)$. Si $f : S \rightarrow S'$ est un morphisme dans Def_k le morphisme f^* a une extension naturelle en $f^* : \mathcal{C}_+(S') \rightarrow \mathcal{C}_+(S)$. Si, de plus, f est un morphisme dans $\text{RDef}_{S'}$, le morphisme $f_!$ admet une extension naturelle en $f_! : \mathcal{C}_+(S) \rightarrow \mathcal{C}_+(S')$. Ces constructions s'étendent à \mathcal{C} .

2.3. — Soit ϕ une fonction dans $\mathcal{P}(S[0, 0, r])$. On dit que ϕ est S -intégrable si pour tout $q > 1$ et tout x dans $|S|$ la série $\sum_{i \in \mathbf{Z}^+} \vartheta_q(\phi(x, i))$ est sommable. On démontre que si ϕ est S -intégrable il existe une unique fonction $\mu_S(\phi)$ dans $\mathcal{P}(S)$ telle que $\vartheta_q(\mu_S(\phi)(x))$ soit égale à la somme de la série précédente pour tout $q > 1$ et tout x dans $|S|$. On note $\mathbf{I}_S \mathcal{P}_+(S[0, 0, r])$ l'ensemble des fonctions S -intégrables dans $\mathcal{P}_+(S[0, 0, r])$ et on pose

$I_S \mathcal{C}_+(S[0, 0, r]) = \mathcal{C}_+(S) \otimes_{\mathcal{P}_+(S)} I_S \mathcal{P}_+(S[0, 0, r])$. C'est un sous $\mathcal{C}_+(S)$ -semi-module de $\mathcal{C}_+(S[0, 0, r])$ et μ_S s'étend par tensorisation en un morphisme $\mu_S : I_S \mathcal{C}_+(S[0, 0, r]) \rightarrow \mathcal{C}_+(S)$.

2.4. — Pour tout entier d , on note $\mathcal{C}_+^{\leq d}(S)$ l'idéal de $\mathcal{C}_+(S)$ engendré par les fonctions $\mathbf{1}_Z$ avec Z sous-assignement définissable de S et $\dim Z \leq d$. On pose $C_+(S) = \bigoplus_d C_+^d(S)$ avec $C_+^d(S) := \mathcal{C}_+^{\leq d}(S) / \mathcal{C}_+^{\leq d-1}(S)$. C'est un semi-groupe abélien gradué, ainsi qu'un $\mathcal{C}(S)_+$ -semi-module. Ses éléments sont les Fonctions constructibles positives sur S . Si φ est une fonction appartenant à $\mathcal{C}_+^{\leq d}(S)$ mais pas à $\mathcal{C}_+^{\leq d-1}(S)$ on note $[\varphi]$ son image dans $C_+^d(S)$. Si $c : S \rightarrow h[1, 0, 0]$ est un morphisme, resp. $f : S \rightarrow S'$ est un isomorphisme, dans Def_k , on démontre que la fonction ordre du gradient $\text{ordgrad} c$, resp. la fonction ordre du jacobien $\text{ordjac} f$, qui n'est définie que presque partout, est égale presque partout à une fonction définissable, et en particulier on peut définir $\mathbf{L}^{\sup(0, -\text{ordgrad} c)}$ et $\mathbf{L}^{-\text{ordjac} f}$ dans $C_+^d(S)$, pour S de dimension d . On définit de même $C(S)$ à partir de $\mathcal{C}(S)$.

3. Intégration motivique : le résultat principal

Théorème 1. — Soit k un corps de caractéristique zéro et soit S dans Def_k . Il existe un unique foncteur $Z \mapsto I_S C_+(Z)$ de Def_S dans la catégorie des semi-groupes abéliens, le foncteur des Fonctions S -intégrables, associant à tout morphisme $f : Z \rightarrow Y$ dans Def_S un morphisme $f_! : I_S C_+(Z) \rightarrow I_S C_+(Y)$ tel que :

(A0) Pour tout Z dans Def_S , $I_S C_+(Z)$ est un sous-semi-groupe gradué de $C_+(Z)$; $I_S C_+(S) = C_+(S)$.

(A1a) Si $S \rightarrow S'$ est un morphisme dans Def_k et Z est dans Def_S , alors $I_{S'} C_+(Z) \subset I_S C_+(Z)$, et pour φ dans $I_{S'} C_+(Z)$, $f_!(\varphi)$ est le même, considéré dans $I_{S'}$ ou dans I_S .

(A1b) Une Fonction positive φ sur Z est S -intégrable si et seulement si elle est Y -intégrable et $f_!(\varphi)$ est S -intégrable.

(A2) Si Z est la réunion disjointe de deux sous-assignements définissables Z_1 et Z_2 , alors l'isomorphisme $C_+(Z) \simeq C_+(Z_1) \oplus C_+(Z_2)$ induit un isomorphisme $I_S C_+(Z) \simeq I_S C_+(Z_1) \oplus I_S C_+(Z_2)$, sous lequel on a $f_! = f_{|Z_1|!} \oplus f_{|Z_2|!}$.

(A3) Pour tout α dans $\mathcal{C}_+(Y)$ et tout β dans $I_S C_+(Z)$, $\alpha f_!(\beta)$ est S -intégrable si et seulement si $f^*(\alpha)\beta$ l'est et dans ce cas $f_!(f^*(\alpha)\beta) = \alpha f_!(\beta)$.

(A4) Si $i : Z \hookrightarrow Z'$ est l'inclusion de sous-assignements définissables d'un même objet de Def_S , $i_!$ est induit par le prolongement par zéro en dehors de Z et envoie injectivement $I_S C_+(Z)$ dans $I_S C_+(Z')$.

(A5) Soit Y dans Def_S et soit π la projection $Y[0, n, 0] \rightarrow Y$. Une Fonction $[\varphi]$ dans $C_+(Y[0, n, 0])$ est S -intégrable si et seulement si $[\pi_!(\varphi)]$ l'est (avec les notations de 2.2) et dans ce cas $\pi_!([\varphi]) = [\pi_!(\varphi)]$.

(A6) Soit Y dans Def_S et soit π la projection $Y[0, 0, r] \rightarrow Y$. Une Fonction $[\varphi]$ dans $C_+(Y[0, 0, r])$ est S -intégrable si et seulement si il existe φ' avec $[\varphi'] = [\varphi]$ qui soit Y -intégrable au sens de 2.3 et telle que $[\mu_Y(\varphi')]$ soit S -intégrable. On pose alors $\pi_!([\varphi]) = [\mu_Y(\varphi')]$.

(A7) Soit Y dans Def_S et soit Z le sous-assignement de $Y[1, 0, 0]$ défini par $\text{ord}(z - c(y)) = \alpha(y)$ et $\overline{\alpha c}(z - c(y)) = \xi(y)$, avec z la coordonnée sur le facteur $\mathbf{A}_{k((t))}^1$ et α, ξ, c des fonctions définissables sur Y respectivement à valeurs dans \mathbf{Z} , $h[0, 1, 0] \setminus \{0\}$ et $h[1, 0, 0]$. On considère $f : Z \rightarrow Y$ induit par la projection. Alors $[\mathbf{1}_Z]$ est S -intégrable si et seulement si $\mathbf{L}^{-\alpha-1}[\mathbf{1}_Y]$ l'est et dans ce cas $f_!([\mathbf{1}_Z]) = \mathbf{L}^{-\alpha-1}[\mathbf{1}_Y]$.

(A8) Soit Y dans Def_S et soit Z le sous-assignement de $Y[1, 0, 0]$ défini par $z - c(y) = 0$ avec z la coordonnée sur le facteur $\mathbf{A}_{k((t))}^1$ et c un morphisme $Y \rightarrow h[1, 0, 0]$. On considère $f : Z \rightarrow Y$ induit par la projection. Alors $[\mathbf{1}_Z]$ est S -intégrable si et seulement si $\mathbf{L}^{\text{sup}(0, -\text{ordgrad}c)}$ l'est et dans ce cas $f_!([\mathbf{1}_Z]) = \mathbf{L}^{\text{sup}(0, -\text{ordgrad}c)}$.

La preuve du théorème utilise de façon essentielle le théorème de décomposition en cellules de Denef et Pas [6].

On définit $I_S C(Y)$ comme le sous-groupe de $C(Y)$ engendré par l'image de $I_S C_+(Y)$. On démontre que si $f : Y \rightarrow Y'$ est un morphisme dans Def_S , le morphisme $f_! : I_S C_+(Y) \rightarrow I_S C_+(Y')$ admet une extension naturelle en $f_! : I_S C(Y) \rightarrow I_S C(Y')$.

L'énoncé suivant est une version générale des théorèmes de changement de variable de [2] et [3].

Théorème 2. — Soit $f : X \rightarrow Y$ un isomorphisme entre sous-assignements définissables de dimension d . Pour toute fonction φ dans $\mathcal{C}_+^{\leq d}(Y)$ ayant une classe non nulle dans $C^d(Y)_+$, $[f^*(\varphi)]$ est Y -intégrable et $f_![f^*(\varphi)] = \mathbf{L}^{\text{ordjac}f \circ f^{-1}}[\varphi]$. On a un énoncé similaire dans C .

Quand S est égal à $h[0, 0, 0]$, i.e. à l'objet final de Def_k , on écrit $IC_+(Z)$ pour $I_S C_+(Z)$ et on dira intégrable pour S -intégrable, de même pour C . Notons que $IC_+(h[0, 0, 0]) = C_+(h[0, 0, 0]) = SK_0(\text{RDef}_k) \otimes_{\mathbf{N}[\mathbf{L}-1]} A_+$ et que $IC(h[0, 0, 0]) = K_0(\text{RDef}_k) \otimes_{\mathbf{Z}[\mathbf{L}]} A$. Pour φ dans $IC_+(Z)$, ou dans $IC(Z)$, on définit l'intégrale motivique $\mu(\varphi)$ par $\mu(\varphi) = f_!(\varphi)$ avec f le morphisme $Z \rightarrow h[0, 0, 0]$. Les relations de cette nouvelle construction avec les constructions antérieures de l'intégration motivique, tant dans sa version géométrique, introduite dans [5] et développée dans [2], que dans sa version arithmétique [3], ainsi qu'avec l'intégration p -adique seront explicitées ultérieurement.

4. Intégrales dépendant d'un paramètre

On fixe Λ dans Def_k qui joue le rôle d'un espace de paramètres. Pour S dans Def_Λ , on considère l'idéal $\mathcal{C}^{\leq d}(S \rightarrow \Lambda)$ de $\mathcal{C}_+(S)$ engendré par les fonctions $\mathbf{1}_Z$ avec Z sous-assignement définissable de S tel que toutes les fibres de $Z \rightarrow \Lambda$ soient de dimension $\leq d$. On pose $C_+(S \rightarrow \Lambda) = \bigoplus_d C_+^d(S \rightarrow \Lambda)$ avec $C_+^d(S \rightarrow \Lambda) := \mathcal{C}_+^{\leq d}(S \rightarrow \Lambda) / \mathcal{C}_+^{\leq d-1}(S \rightarrow \Lambda)$. C'est un semi-groupe abélien gradué (et aussi un $\mathcal{C}_+(S)$ -semi-module). Si ϕ appartient à $\mathcal{C}_+^{\leq d}(S \rightarrow \Lambda)$ mais pas à $\mathcal{C}_+^{\leq d-1}(S \rightarrow \Lambda)$ on note $[\phi]$ son image dans $C_+^d(S \rightarrow \Lambda)$. On a l'analogie suivant du théorème 1.

Théorème 3. — *Soit k un corps de caractéristique zéro, soit Λ dans Def_k et soit S dans Def_Λ . Il existe un unique foncteur $Z \mapsto I_S C_+(Z \rightarrow \Lambda)$ de Def_S dans la catégorie des semi-groupes abéliens, associant à tout morphisme $f : Z \rightarrow Y$ dans Def_S un morphisme $f_{!\Lambda} : I_S C_+(Z \rightarrow \Lambda) \rightarrow I_S C_+(Y \rightarrow \Lambda)$ vérifiant les analogues de (A0)-(A8) obtenus en remplaçant $C_+(-)$ par $C_+(- \rightarrow \Lambda)$ et ordgrad par son analogue relatif ordgrad_Λ , pour lequel les dérivées partielles ne sont prises que par rapport aux variables dans les fibres de la projection sur Λ .*

Pour $f : Z \rightarrow \Lambda$ dans Def_Λ , on dispose ainsi d'un morphisme $\mu_\Lambda := f_{!\Lambda} : I_\Lambda C_+(Z \rightarrow \Lambda) \rightarrow \mathcal{C}_+(\Lambda) = I_\Lambda C_+(\Lambda \rightarrow \Lambda)$ qui correspond à l'intégration dans les fibres de Λ d'après l'énoncé suivant.

Proposition 2. — *Soit ϕ une Fonction dans $C_+(Z \rightarrow \Lambda)$. Elle appartient à $I_\Lambda C_+(Z \rightarrow \Lambda)$ si et seulement si pour tout point λ de Λ , la restriction ϕ_λ de ϕ à la fibre de Z en λ est intégrable. L'intégrale motivique de ϕ_λ est alors égale à $i_\lambda^*(\mu_\Lambda(\phi))$, pour tout λ .*

Bien entendu on peut également définir l'analogie relatif $C(S \rightarrow \Lambda)$ de $C(S)$, et étendre la notion d'intégrabilité et la construction de $f_{!\Lambda}$ à ce cadre.

. — Pendant la réalisation de ce projet, le premier auteur était chercheur postdoctoral du Fonds de Recherche Scientifique - Flandres (Belgique) et il a bénéficié du soutien partiel du projet européen EAGER.

Références

- [1] R. CLUCKERS & F. LOESER, *Constructible motivic functions and motivic integration*, en préparation.
- [2] J. DENEFF & F. LOESER, *Germes of arcs on singular algebraic varieties and motivic integration*, Invent. Math. **135** (1999), 201–232.
- [3] J. DENEFF & F. LOESER, *Definable sets, motives and p -adic integrals*, J. Amer. Math. Soc., **14** (2001), 429–469.

- [4] L. VAN DEN DRIES, *Dimension of definable sets, algebraic boundedness and Henselian fields*, Ann. Pure Appl. Logic, **45** (1989), 189–209.
- [5] M. KONTSEVICH, Exposé à Orsay, 7 décembre 1995.
- [6] J. PAS, *Uniform p -adic cell decomposition and local zeta functions*, J. Reine Angew. Math., **399** (1989), 137–172.